

# REOLOGÍA DE SISTEMA GRANULAR BIDIMENSIONAL SOMETIDO A CIZALLE



*Nelson Sepulveda, Escuela de Ciencias Básicas*

*Francisco Melo, Departamento de Física, Usach*

*Francisco Vivanco, Departamento de Física, Usach*

## INTRODUCCIÓN

Los medios granulares, son de amplio interés en varias áreas de la ingeniería, como también por su versatilidad en distintas aplicaciones industriales; sean estas de origen minero, farmacéutico, o agricultura. Por ello es que presta un particular interés el entender el comportamiento reológico de estos sistemas [1,2]. Una de las características principales de los sistemas granulares es su capacidad de comportarse como sólido, y la vez poder fluir como gas o líquido dependiendo de la energía inyectada en el sistema [3,4]. Este comportamiento permite encontrarlo en el polvo en suspensión en ciudades, en eventos como alud o terremotos, y el parámetro físico fundamental es la fricción entre los granos, lo cual es afectado por el tamaño, y forma que posean las partículas.

Los medios granulares están influenciados fuertemente por el tipo de distribución que poseen las partículas al interior del medio, al aplicar esfuerzos a sistemas de baja densidad, los granos tienden a llenar esas vacancias, el observable macroscópico es la compactación global del medio. Pero al contrario si los sistemas son densos con baja cantidad de vacancias, al aplicar el esfuerzo el sistema tiende a dilatarse, fenómeno observado por Reynolds en 1885 [5]. Este fenómeno es típico al caminar por arenas cerca del mar, donde al pisar se seca el arena alrededor del pie, esto debido a la dilatación que experimenta el arena macroscópicamente, y provoca que el agua penetre en los nuevos espacios al interior del medio. Al producirse el esfuerzo de cizalle, a nivel microscópico, el hecho que un grano pueda deslizarse o trepar sobre otra depende de las fuerzas de fricción presente entre los granos.

Si se consideran dos partículas en contacto en el plano, y una de ellas sometidas a una fuerza normal  $f_n$  y a una fuerza tangencial  $f_t$  respecto de un sistema de coordenadas (ver Figura 1), aparecerán las fuerzas tangencial T y normal N que se oponen al movimiento de la partícula superior.

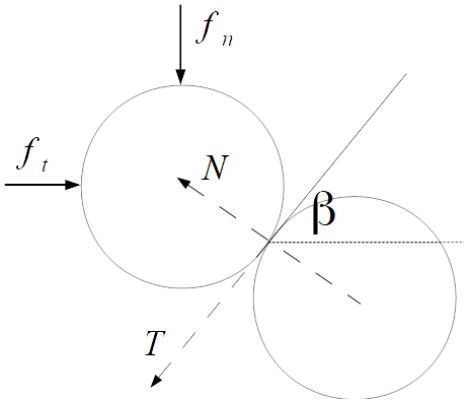


FIGURA 1

Caption: Balance de fuerzas entre partículas, bajo esfuerzos microscópicos

Al realizar la equivalencia de las fuerzas según el sistema de referencia del esquema planteado, se obtiene:

$$f_t \cos \beta - f_n \sin \beta - T = 0$$

$$-f_t \sin \beta - f_n \cos \beta + N = 0$$

Pero considerando el parámetro de fricción entre los granos, entonces es posible plantear que  $T/N = \sin \phi / \cos \phi = \tan \phi$ , y reemplazando en la ecuación anterior, entonces:

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{f_t \cos \beta - f_n \sin \beta}{f_t \sin \beta + f_n \cos \beta}$$

Lo cual, si se expresa en términos de las fuerzas tangencial  $f_t$  y normal  $f_n$ , de manera macroscópica respecto a la partícula superior, es posible escribir:

$$\frac{f_t}{f_n} = \frac{\sin(\phi + \beta)}{\cos(\phi + \beta)} = \tan(\phi + \beta)$$

Entonces queda expresada las fuerzas tangenciales y normales, de manera macroscópica respecto a la partícula superior [6].

Este tipo de interacción entre partículas puede generarse a partir de esfuerzos de cizalle en un sistema, por cizalle entendemos un esfuerzo que provoca desplazamientos en sentidos opuestos en el medio (ver Figura 3).

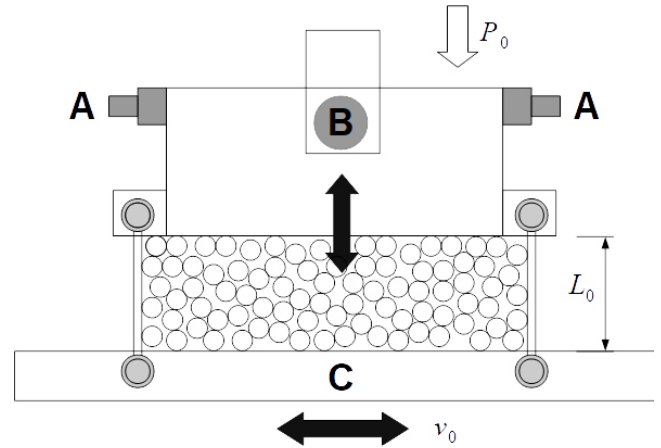


FIGURA 3

Esquema de la celda bidimensional de deformación controlada. A) rodamientos de aire laterales, B) rodamiento de aire bajo placa, C) Placa inferior con motor de paso que permite deformación en ambos sentidos.

## MATERIALES Y METODOS

### Montaje Experimental

El montaje experimental consiste de dos placas paralelas que se encuentran pivoteadas en sus caras laterales, con ello fue posible realizar el cizalle a velocidad controlada por un motor de paso, (ver Figura 1.2), sector C. Las dimensiones de la celda son de 50 cm de largo y altura variable entre 4 y 6 cm, a las paredes paralelas se les adhirieron mitades de partículas circulares de distintos diámetros. Para minimizar la fricción en las superficies móviles se utilizaron rodamientos de aire (sectores A), y sobre la placa superior se aplicó una carga constante de 7 N. Con la misma finalidad se ubicó un rodamiento de aire bajo la placa en el sector B.

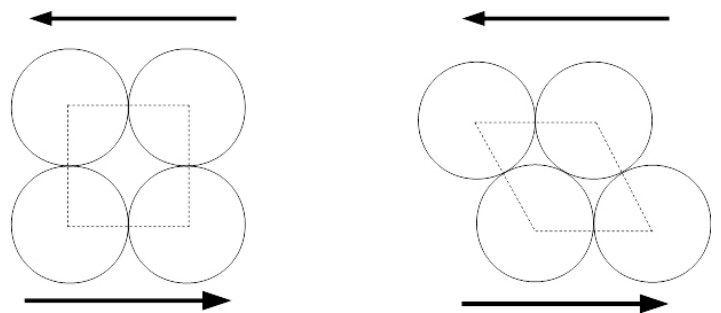


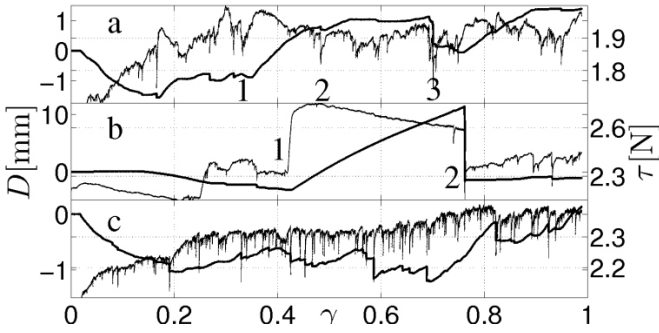
FIGURA 1.2

Cizalle sobre una capa de granos, producido por fuerzas en igual dirección pero de sentido contrario.

El movimiento de la placa horizontal, se realizó a velocidad constante  $v_0$  entre 0.1 y 4.8 mm/s controlada por LabVIEW a través de la tarjeta NI PCI-7350 de National Instruments, este sistema permitió medir simultáneamente dilatación y fuerza de cizalle, dilatación por medio de un sensor inductivo y cizalle por medio de un sensor de la deflexión de dos placas de acero paralelas ubicadas en el extremo la barra móvil. El sistema se deflectó hasta que los brazos alcanzaron un ángulo de 45° respecto a la horizontal, y cada deflexión se realizó 30 veces. El medio granular se compuso de 300 partículas cilíndricas, pentagonales y hexagonales de 8 mm de diámetro circunscrito.

## RESULTADOS Y DISCUSIONES

Registros típicos obtenidos de la dilatación experimentada para velocidad de  $v_0=0.1$  mm/s, como del cizalle para los tres tipos de partículas es posible observar en la Figura 4, entre las cuales, una de las curvas que destaca es la dilatación experimentada con partículas hexagonales en la ventana central **b**, mientras que para las partículas circulares (**a**), y partículas pentagonales (**c**), las amplitudes corresponden a pequeñas fracciones del tamaño de un grano. También es posible observar altas fluctuaciones en las curvas de fuerza y mayoritariamente en los granos pentagonales. Mientras tanto para los granos hexagonales estas fluctuaciones se producen con menos frecuencia.



**FIGURA 4**

Grafo típico de curvas de cizalle y dilatación para partículas a) cilíndricas, b) hexagonales y c) pentagonales. Curvas realizadas para 300 granos a 0.1mm/s.

Las amplias curvas de dilatación observadas en partículas hexagonales, se producen por la nucleación característica debido a las facetas en este tipo de partículas. Una gran cadena estable es capaz de soportar todo el peso de la placa superior, (ver Figura 5). Para explicar el mecanismo de formación de la cadena, y las curvas obtenidas es posible identificar algunos parámetros para un modelo de pivote rígido. Si se considera una distancia inicial fija  $x'$  desde el punto de nucleación al eje vertical donde el pivote se levanta (ver Figura 6), se puede plantear que el ángulo respecto a la vertical cambia de  $\theta_0$  a  $\theta'$  que varía a medida que la base se desplaza. La distancia al punto de apoyo puede ser escrita como:

$$x' - vt = L \sin \theta'$$

Si  $x'$  es la distancia variable en el eje horizontal,  $x'$  será la distancia variable en el eje vertical, luego se tiene  $x' = L \sin \theta_0$  y  $y' = L \cos \theta_0$ . La diferencia en la distancia vertical  $\Delta y$  se puede escribir como:

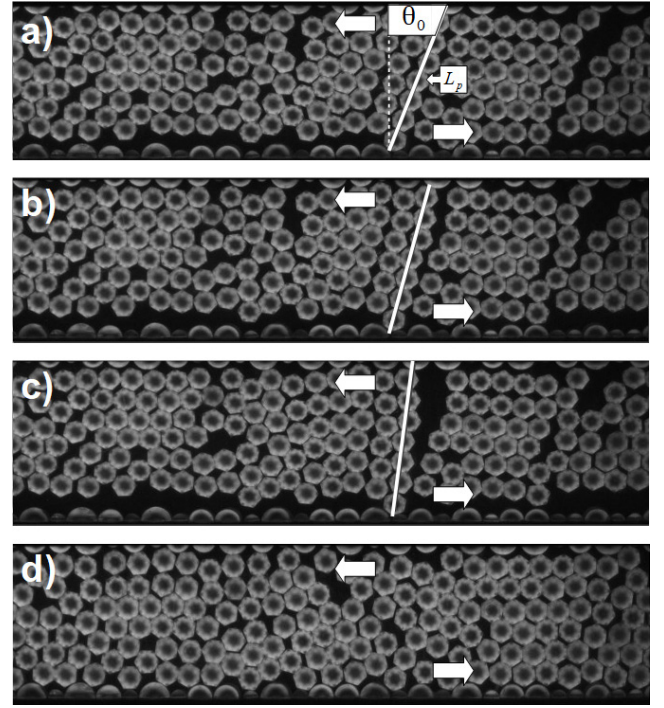
$$\Delta y = L \cos \theta' - L \cos \theta_0$$

Entonces, reemplazando las ecuaciones:

$$(L \sin \theta_0 - vt)^2 + (L \cos \theta_0 + \Delta y)^2 = L^2$$

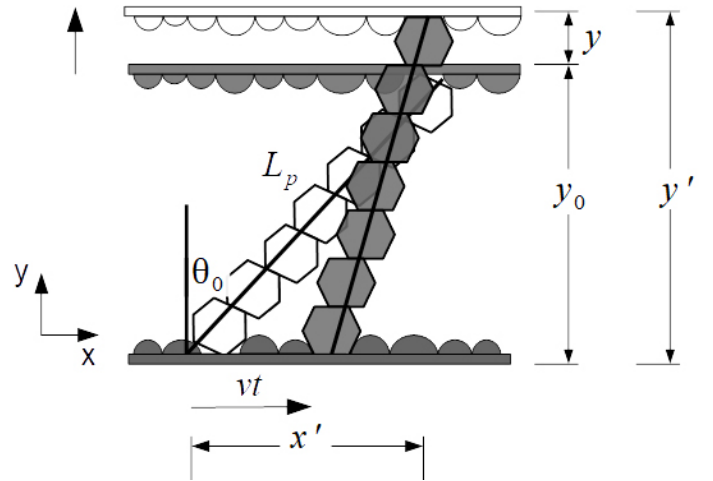
Y sustituyendo  $\Delta y$  por  $D$  se obtiene una expresión para la dilatación:

$$\Delta y = D = \sqrt{(L^2 - (L \sin \theta_0 - vt)^2)} - L \cos \theta_0$$



**FIGURA 5**

Mecanismo de nucleación en cadenas hexagonales. a) rotación, b) crecimiento, c) colapso y d) desplazamiento.



**FIGURA 6**

Esquema del modelo de pivote para granos hexagonales.

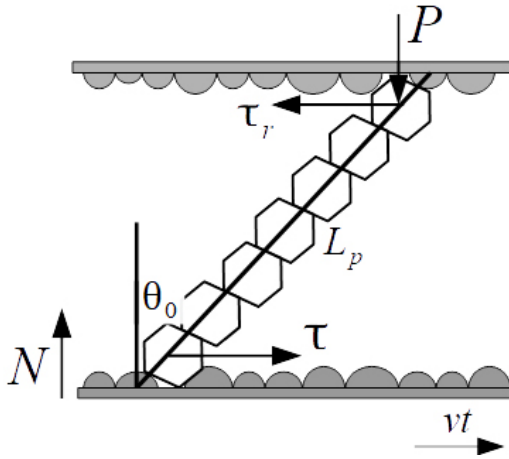
Para un elemento similar en el modelo de pivote rígido, en el caso de las fuerzas necesariamente se deben considerar los torques actuando sobre la cadena principal, y la reacción normal  $N$ , como muestra la Figura 7. Los torques se pueden escribir como:

$$\vec{r} \times \vec{P} = -PL \cos \theta_0$$

$$\vec{r} \times \vec{\tau}_r = +\tau L \cos \theta_0$$

Y en base al equilibrio estático, la suma de los torques se debe anular con lo cual  $PL \sin \theta' = \tau L \cos \theta'$ , entonces  $\tan \theta' = \tau/P$ . En base a la observación de la figura 6, se obtiene:

$$\tan \theta' = \frac{x'}{y'} = \frac{x_0 - vt}{y'}$$



**FIGURA 7**

Esquema de las fuerzas que actúan sobre el pivote rígido, donde se observan fuerzas  $P$  y  $N$  en el sentido de los ejes principales, y en sentidos contrarios las fuerzas de cizalle.

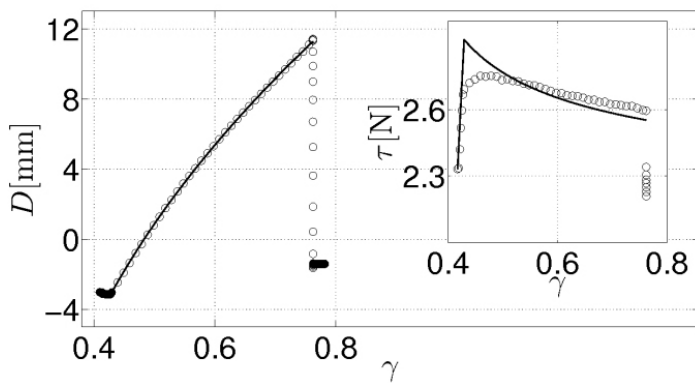
Pero como se obtuvo previamente  $y' = y_0 + \Delta y = L \cos \theta_0 + \Delta y$ , y reemplazando en la ecuación anterior:

$$\tan \theta' = \frac{L \sin \theta_0 - vt}{\sqrt{L^2 - (L \sin \theta_0 - vt)^2}}$$

Y finalmente es posible obtener una expresión adimensional en término de las fuerzas de cizalle  $\tau$  y normal  $N$ , ambas conocidas:

$$\frac{\tau}{N} = \frac{L \sin \theta_0 - vt}{\sqrt{L^2 - (L \sin \theta_0 - vt)^2}}$$

El ajuste a una serie de datos, con el modelo de pivote para partículas hexagonales se observa en la Figura 8. Se debe destacar que el mecanismo de relajación de esfuerzos por deslizamiento de planos adyacentes, no se observa en el caso de este tipo de granos, debido a que las facetas propias de la geometría hexagonal de los granos impiden el deslizamiento de planos adyacentes.



**FIGURA 8**

Ajuste al modelo de pivote para dilatación  $D$ , y fuerza de cizalle  $\tau$  para partículas hexagonales, con velocidad de deformación  $0.1 \text{ mm/s}$  y fuerzas normales de  $7N$ .

## CONCLUSIONES

En el caso de partículas pentagonales, los datos permiten observar que la forma particular de este tipo de grano impide la formación de estructuras de largo alcance, de debido al reordenamiento permanente de los pentágonos, lo cual se traduce en la imposibilidad de formar estructuras cristalinas. En las curvas de dilatación como de cizalle, se traduce en altas fluctuaciones, con alta intermitencia de eventos.

En el caso de partículas cilíndricas, las fluctuaciones rápidas de baja amplitud, las cuales se observan en las curvas de fuerza son la respuesta a pequeños cambios, que se producen en la red de contacto al interior del sistema.

En el caso de las partículas hexagonales, debido a su particular geometría son capaces de dilatar hasta alturas críticas el sistema, esto se da para el caso de cadenas compuestas por cerca de 8 partículas. Uno de los factores fundamentales en la amplitud de la dilatación, lo juegan las facetas y en el caso particular de hexágonos debido a su alta capacidad de nucleación. La compactación fluctúa similar a un oscilador stick-slip, Un colapso sincronizado ocurre como una consecuencia del colapso de pivotes rígidos debido al efecto de buckling [7].

## AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos al Laboratorio de Física No Lineal, del departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile, donde fue posible realizar los experimentos. A MECESUP beca de Doctorado (2008), y a la comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnología (CONICYT) mediante la Beca para Estudios de Doctorado en Chile, Año académico 2009 (GRANT N° D-21090840).

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] R. M. Nedderman, *Statics and Kinematics of Granular Materials* (Cambridge University Press, New York, 1992)
- [2] M. Oda and K. Iwashita (Eds.), *Mechanics of Granular Materials: an Introduction* (Balkema, Rotterdam, 1999)
- [3] J. Duran, *Sands, Powders and Grains* (Springer, New York, 2000)
- [4] S. J. Anthony, W. Hoyle and Y. Ding (Eds.), *Granular Materials Fundamentals and Applications Chapter 6*, pp. 157 - 183, The Royal Society of Chemistry, (2004)
- [5] O. Reynolds, *On the Dilatancy of Media Composed of Rigid Particles in Contact*, with *Experimental illustrations*, *Phil. Mag.*, S. 5., Vol. 20, No 127. (1885)
- [6] N. Sepúlveda. (2015). *Eventos Plásticos en un Sistema Granular Bidimensional* (Tesis Doctoral). Universidad de Santiago de Chile. Chile.
- [7] N. Sepúlveda et al. *Effects of grain shape on the response of a two-dimensional granular material under constant shear rate*, *Physical Rev. E*, Vol 90, 052202. (2014).